

Математические модели в медицине

Дмитриева Ирина Владимировна

Досрок только без пропуска

30/02

Экзамен = лекции (только свои!)



2 части (фармакология & модель)

определенная

Лит-ра:

- 1) Р. Веллман "Математ. методы в медицине" ("Мир", 1987г.)

Мат. модель - описание
данного процесса в некот.
абстракт. форме с при-
менением некот. мат.
понятий

≠ не сам объект, а его

Математическая модель - ее описа-
ние. Различные типы моделей

Этапы мат. моделирования:

- 1) Построение мат. модели (напр., $u_t = a^2 u_{xx}$)
- 2) Разработка мет. и алгоритма решения (напр., метод Фурье)
- 3) Проведение вычислит. эксперимента

Характеристики построения мат. модели

- 1) Характеристики и св-ва (p)
- 2) Воздействие внешних объектов на
нужн объект (f)
- 3) Отклик на внешнее воздействие (u)

допустимые
н.н.-ва

оператор

Модель ← ур-ние связи: $\mathcal{A}_p[u] = f$, $u \in U$, $f \in F$

Ар ~~либ~~ либ нелинейным $\Rightarrow$ не лине.
(однообъект.) модель

If нет воздействия $\Rightarrow$ нет отклика $\Rightarrow$ однород. ур-ние: $f=0 \Rightarrow \text{Ар } [u]=0 \Rightarrow u=0$
 If $\|f\| < 1 \Rightarrow \|u\| < 1 \Rightarrow \text{Ар} \approx L_p \Rightarrow$
 $\Rightarrow L_p[u] = f$
 слабое воздействие слабый отклик главная линейная часть

If несколько воздействий, т.е. $L_p[u_i] = f_i, i=1, n$, то $A = \sum_{i=1}^n f_i, u = \sum_{i=1}^n u_i \Rightarrow$
 $\Rightarrow L_p[u] = L_p[\sum_{i=1}^n u_i] = \sum_{i=1}^n L_p[u_i] = \sum_{i=1}^n f_i = f$

Мат модели бывают:

- 1) временные (изменение отклика от воздействия во времени; объект - единое целое, свойства зависят от времени)
точечные (название в медицине)
- 2) пространственные (в пр-ве; взаимодействия частей)
непрерывные (назв. в мед.) [томография, рентген]
- 3) пространственно-временные (пространств. отклик во времени от воздействия) [томография работающего органа]

Временные модели (в общем виде)

* однообъектную модель (т.е. орган)

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = f(t, u(t)), \text{ // либ нелинейное} \\ u(t=t_0) = u_0, \quad (t_0 \leq t \leq t_0 + T) \end{cases}$$

↑
нач. время (момент)

→ промежуток (период) лечения

* для уравнения:
$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = f(t, u(t)) = k(t)u(t) + f_1(t), \\ u(t_0) = u_0, \\ t_0 \leq t \leq t_0 + T \end{cases}$$
 экспериментальный коэффициент

If $k(t) = k_0 = \text{const}$, то можно находим решение:

$$\frac{du}{dt} = k_0 u(t) + f_1(t), \Rightarrow$$

$$u(t_0) = u_0$$

// решаем сначала однород.

$$\frac{du}{dt} = k_0 u(t) \Leftrightarrow u(t) = C e^{k_0 t} \quad // \text{МВП}$$

$$C' e^{k_0 t} + C k_0 e^{k_0 t} = C k_0 e^{k_0 t} + f_1(t),$$

$$C' = f_1 e^{-k_0 t},$$

$$C(t) = \int_{t_0}^t f_1(\tau) e^{-k_0 \tau} d\tau + C$$

$$u(t) = C e^{k_0 t} + \int_{t_0}^t f_1(\tau) e^{-k_0(t-\tau)} d\tau$$

$$C = u_0 \quad // \text{из нач. усл.}$$

$$\Rightarrow u(t) = u_0 e^{k_0 t} + \int_{t_0}^t f_1(\tau) e^{k_0(t-\tau)} d\tau \rightarrow \text{решение}$$

* двухобъект. модель (взаимодействие 2х органов) мн. спущей:

(концентрация препарата в i-м объекте (органе))

$$u_1'(t) = k_{11} u_1(t) + k_{12} u_2(t) + f_1(t),$$

введение препарата в орган

$$u_2'(t) = k_{21} u_1(t) + k_{22} u_2(t) + f_2(t),$$

воздействие

$$u_1(t_0) = u_{10}, \quad u_2(t_0) = u_{20}$$

Векторный вид:

$$\bar{U}'(t) = \hat{K} \bar{U}(t) + \bar{F}(t),$$

$$\bar{U}(t=0) = U_0, \text{ где}$$

$$\bar{U}(t) = \begin{pmatrix} U_1(t) \\ U_2(t) \end{pmatrix}, \quad \hat{K} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix}, \quad U_0 = \begin{pmatrix} U_{10} \\ U_{20} \end{pmatrix}$$

Мат. моделирование в задачах фармакокин.

Мат. модели фармакокинетики

Фармакокинетика — наука о движении лекарств препаратов в организме человека

Задача: опр-ние классов мат. мод., а позволяют опр-ть концентрацию лек. пр-та и его активность метаболитов в зав-ти от времени в органе человека, который подвергается лечению

* однообъект. модель: в орган вводится лек. пр-т. Внутри органа — распад и вывод лек. пр-та. Нужн. опр-ть сколько нужно ввести лек. пр-та, чтобы его конц-ция в органе наход-сь на некоем оптим. уровне, неосл. д/лечения органа. Для построения запишем уравнение

баланса концентрации д/органа

$V(t)$ — объем крови в органе

$x(t)$ — концентрация ^{лек.} препарата в органе
не относят. $V(t)$

Тогда за время Δt

$$Q_1 = V(t) (x(t + \Delta t) - x(t)) \quad // \text{изм-ние конц-ции в органе}$$

$$Q_2 = -k V(t) x(t) \Delta t \quad // \text{вывод лек. пр-та}$$

$$Q_3 = f(t) V(t) \Delta t \quad // \text{ввод лек. пр-та}$$

коэф-т вывода пр-та из органа относит. общ. объема лек. пр-та
ск-ть введения лек. пр-та в орган в единицу времени
относит. объема крови в органе

Тогда: $Q_1 = Q_2 + Q_3$,

$$V(t) (x(t + \Delta t) - x(t)) = -k V(t) x(t) \Delta t + f(t) V(t) \Delta t,$$

$$\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = -k x(t) + f(t),$$

$$\{\Delta t \rightarrow 0\} \quad x(t) = x_0 e^{-kt} + \int_{t_0}^t f(\tau) e^{-k(t-\tau)} d\tau$$

$$x'(t) = -k x(t) + f(t)$$

$$x(t = t_0) = x_0, \quad t_0 \leq t \leq t_0 + T$$

наша
однооб-
модель

$$f(t) = 0: \quad x'(t) = -k x(t),$$

$$\Leftrightarrow x(t) = x_0 e^{-k(t-t_0)}$$

$$x(t_0) = x_0, \quad t_0 \leq t \leq t_0 + T$$

$$k = \text{const}, \quad x(t_1) = x_0 e^{-k(t_1-t_0)} = x_1$$

сами
померили

$$\text{находим } k = \frac{1}{t_1 - t_0} \ln \frac{x_0}{x_1}$$

$$\text{If } f(t) \neq 0, x_0 = x(t_0) = 0 \Rightarrow x(t) = \int_{t_0}^t f(\tau) e^{-k(t-\tau)} d\tau$$

$e^{-k(t-\tau)} d\tau$ // ИУ Вольтеппа II типа, рекуррент, !, II. У.

If $f_1(t)$ - рекуррент, тогда $f_2(t) = f_1(t) + C \sin nt$

$$\Rightarrow x_1(t) = \int_{t_0}^t f_1(\tau) e^{-k(t-\tau)} d\tau$$

С числом
асимптотический
(вектор)

$$x_2(t) = \int_{t_0}^t [f_1(\tau) + C \sin n\tau] e^{-k(t-\tau)} d\tau$$

материальным

$$|x_1(t) - x_2(t)| = \left| \int_{t_0}^t C \sin n\tau e^{-k(t-\tau)} d\tau \right| \leq \frac{C}{n}$$

// If n большие, то x_1 и x_2 мало отличаются друг от друга

В классе $f(t)$ рассмотрим случаи г/устойчивости

$$\text{If } t_0 = 0, x(t_0 = 0) = 0 \Rightarrow 0 \leq t \leq T; f(t) -$$

- монотонно возрастающая, ^{хотим дать} <sup>до x_0 (т.е. поддержи-
вать порог на уровне x_0)</sup>

Но сначала $f_0 = \text{const}$ (капельница)

$$\text{Тогда } x(t) = \int_{t_0=0}^t f_0 e^{k(\tau-t)} d\tau = \frac{f_0}{k} e^{k(\tau-t)} \Big|_0^t = \frac{f_0}{k} (1 - e^{-kt}) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{f_0}{k}$$

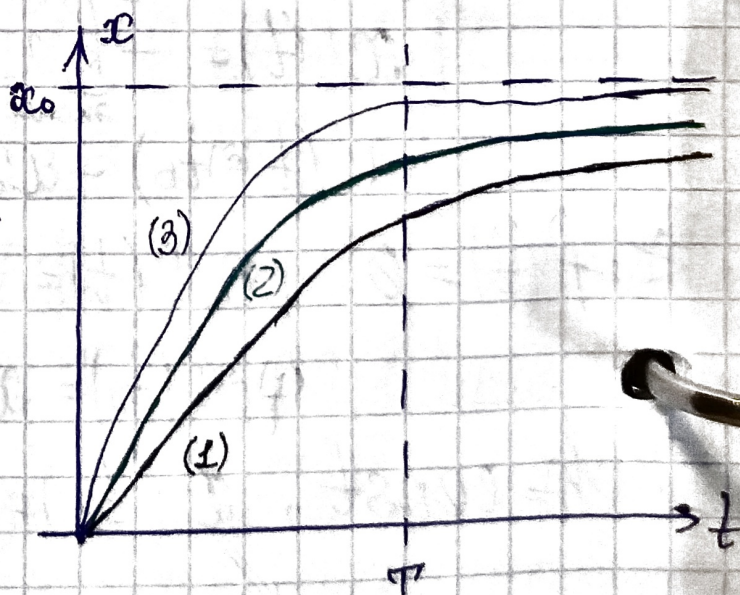
$$f_0 = k x_0$$

Вычисл. эксперимент:

$$k = 0,1 \quad (1)$$

$$k = 0,5 \quad (2)$$

$$k = 1 \quad (3)$$



$$x'(t) = -kx(t) + f_1,$$

$$x(t=0) = x_0, \quad 0 \leq t \leq T$$

// Dandee xotuni gaitu
go x_1

$$x(t) = x_0 e^{-kt} + \int_0^t f_1 e^{-k(t-\tau)} d\tau = x_0 e^{-kt} +$$

$$+ \frac{f_1}{k} (1 - e^{-kt})$$

$$\text{If } f_1 = kx_1 \Rightarrow$$

$$x(t) = x_1 + (x_0 - x_1)e^{-kt}$$

